

La matematica e lo spazio

I modelli geometrici

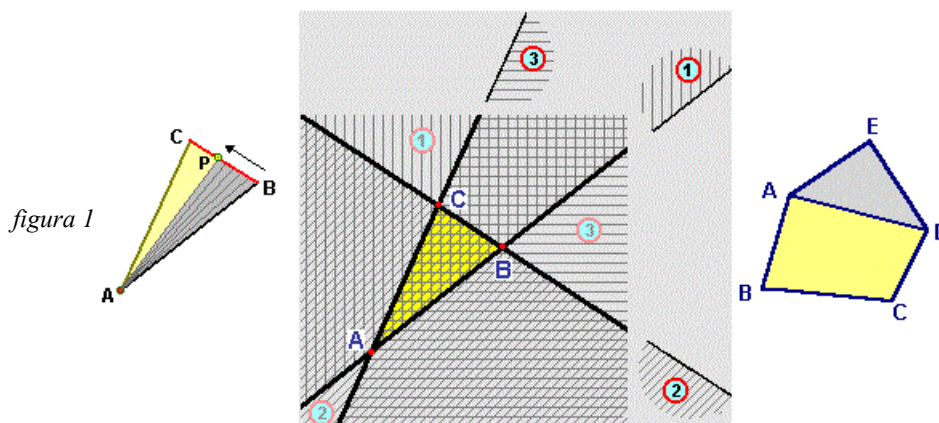
Scheda 3

Trasformazioni geometriche

- [1. Poligoni](#)
 - [2. Simmetrie, isometrie, similitudini e trasformazioni di scala](#)
 - [3. Altre figure](#)
 - [4. Alcuni teoremi](#)
 - [5. Esercizi](#)
- ➔ [Sintesi](#)

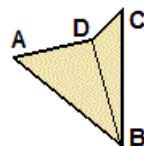
1. Poligoni

Dati tre punti A, B e C non allineati (cioè tali che non esista una retta a cui appartengano tutti e tre), il **triangolo** ABC è (vedi figura sotto a sinistra) l'unione dei segmenti AP al variare di P su BC. Ovvero (vedi figura al centro) è l'intersezione dei tre semipiani (1), (2) e (3) delimitati rispettivamente dalle rette AB, BC e CA e contenenti rispettivamente C, A e B. I *tre angoli* di vertici A, B e C generati dalle rotazioni di AB su AC (quella della figura a sinistra), di BC su BA e di CA su CB sono gli angoli del triangolo. I segmenti AB, BC ed AC sono i *lati* del triangolo.



Gli altri **poligoni** ("figure dai molti angoli", dalle parole greche *polis*, molto, e *gonia*, angolo) sono ottenibili a partire da un triangolo mediante successive, opportune, unioni di nuovi triangoli: aggiungendo un triangolo ad un triangolo che abbia con esso un solo lato in comune posso ottenere un quadrangolo (se nessuno degli altri due lati è allineato ad un lato del primo triangolo); aggiungendo un altro triangolo (vedi figura sopra a destra) posso ottenere un pentagono, e così via.

I *vertici* degli angoli del poligono sono detti anche vertici del poligono. L'unione dei suoi lati ne forma il *contorno*, di cui si assume come lunghezza la somma delle lunghezze dei lati stessi; la lunghezza del contorno di un poligono viene detta suo **perimetro**. Gli angoli di un poligono, come nel caso dell'angolo in D del quadrangolo a lato, possono essere maggiori di un angolo piatto. Per inciso osserviamo che a volte si parla di angoli "interni" di un poligono invece che di angoli; è uno strano modo di dire che non ha molto senso (qualcuno definisce "angolo esterno" di vertice P un angolo che ha come lati un lato avente P come estremo e il prolungamento dell'altro lato avente P come estremo, ma nel caso raffigurato non ci sarebbe alcun angolo "esterno" di vertice D!).

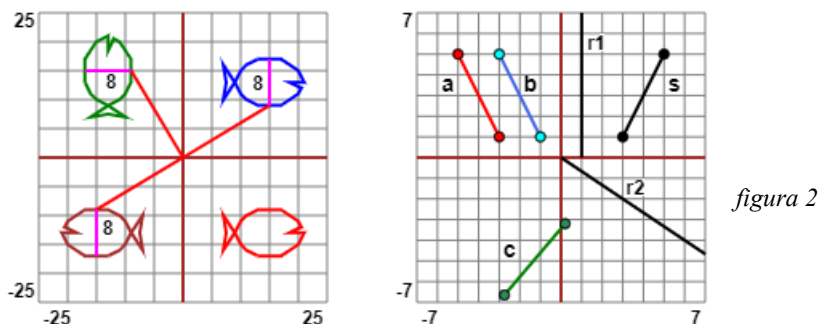


I punti di un poligono non appartenenti al contorno sono detti suoi **punti interni**. A volte viene chiamato *poligono* ciò che qui abbiamo chiamato contorno del poligono; dal contesto si capisce, in genere, il modo in cui viene usato questo termine.

2. Simmetrie, isometrie, similitudini e trasformazioni di scala

Definite le rotazioni, possiamo completare il discorso lasciato in sospeso alla fine della ➔ §2 della scheda 2 di questa unità didattica. Abbiamo visto che le traslazioni conservano la distanza (se traslo un segmento la sua lunghezza non cambia) e non modificano l'orientamento delle figure (se traslo una semiretta la sua direzione non cambia). Le **rotazioni** possono modificare l'orientamento di una figura, ma, anch'esse, **conservano la distanza**.

Ciò è facilmente verificabile per alcune rotazioni, ad es. quelle attorno a (0,0) ampie 90° e 180°, come è illustrato nella *figura 2* a sinistra: ruotando il pesce blu di 90° ottengo il pesce verde; ruotandolo di 180° ottengo il pesce marrone. Ma la cosa può essere dimostrata in generale.



Se definisco **movimento piano** ogni trasformazione ottenibile componendo traslazioni e rotazioni, sono dunque certo che i movimenti piani conservano la distanza e, quindi, sono una buona rappresentazione matematica di come può essere spostato un oggetto rigido

appoggiato su una superficie piana.

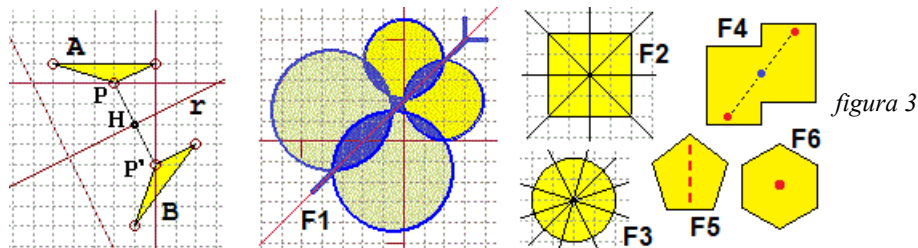
Abbiamo visto che vi sono trasformazioni che, pur conservando le distanze, non sono movimenti piani: per essere realizzate "fisicamente" necessitano di un **ribaltamento**, di un movimento che esce dal piano. Di questo genere è, ad esempio, la trasformazione che, ribaltando attorno all'asse x , associa al pesce blu il pesce rosso. Questa trasformazione è chiamata **simmetria rispetto all'asse x** .

Consideriamo le trasformazioni del segmento s rappresentate nella figura 2 a destra. Quella che gli associa a è la simmetria rispetto all'asse y ($(x,y) \rightarrow (-x,y)$). Quella che gli associa b è la simmetria rispetto ad r_1 , ossia alla retta $x = 1$ ($(x,y) \rightarrow (-x+2,y)$). Quella che gli associa c è la simmetria rispetto ad r_2 , ossia alla retta $y = -2/3 \cdot x$.

Sotto, a sinistra, un altro esempio: una figura A e la figura B ad essa simmetrica rispetto alla retta r . Data A , come può essere tracciata B ?

Basta considerare r come nuovo asse y e, come se si fosse tracciato un nuovo asse x , usando una squadra, associare a ogni punto P di A il punto P' che rispetto al nuovo sistema di riferimento abbia:

- uguale ordinata (cioè stia sulla perpendicolare a r passante per P) e
- ascissa opposta (cioè stia nel semipiano delimitato da r opposto a quello di P e – vedi figura – sia tale che $d(H,P) = d(H,P')$).

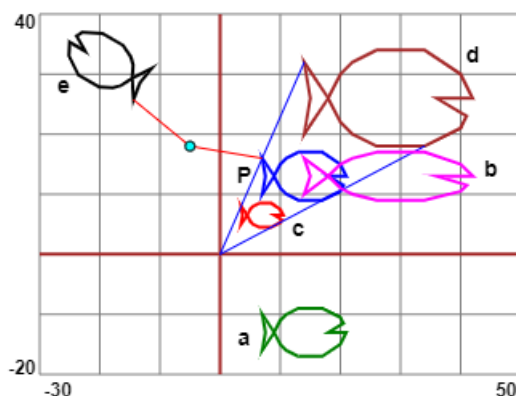


Si usa dire, anche, che una figura è **simmetrica** se è dotata di un **asse di simmetria**, cioè se esiste una retta che divide la figura in due parti simmetriche rispetto ad essa. Consideriamo le altre 6 figure disegnate qui sopra.

La "farfalla" $F1$ ha un solo asse di simmetria. $F2$ ne ha 4. $F3$ ne ha infiniti. $F2$ e $F3$ hanno anche un **centro di simmetria**, cioè un punto attorno al quale possono essere ruotate di 180° senza cambiare aspetto. Ogni altro poligono regolare con un numero pari di lati, come $F6$, ha un centro di simmetria, mentre $F5$, e ogni altro poligono regolare con un numero dispari di lati, ha solo un asse di simmetria. Ma non è detto che se una figura ha un centro di simmetria abbia anche un asse di simmetria: basta considerare $F4$.

1 Osserva il pesce P nelle figura sottostante e rispondi alle domande seguenti.

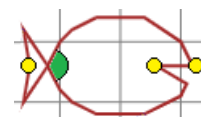
- (A) La trasformazione che porta P in a è una traslazione, una rotazione o una simmetria? Sai descriverla?
- (B) La trasformazione che porta P in e è una traslazione, una rotazione o una simmetria?
- (C) c è un pesce più piccolo ottenuto moltiplicando le coordinate dei punti del pesce originale per un numero h minore di 1 (i punti del pesce rimpicciolito distano dall'origine meno dei corrispondenti punti del pesce originale), d è un pesce più grande ottenuto moltiplicando le coordinate dei punti del pesce originale per un numero k maggiore di 1. Quanto valgono h e k ?
- (D) b è stato ottenuto sottoponendo P a un altro tipo di trasformazione. Provate a descriverla a parole e mediante una opportuna funzione a 2 input e 2 output ($F(x,y)=\dots$).



Le trasformazioni piane ottenibili componendo movimenti e ribaltamenti, cioè componendo traslazioni, rotazioni e simmetrie, **conservano la distanza**. Si può dimostrare che non vi sono altre trasformazioni piane che conservano la distanza. Queste trasformazioni vengono anche chiamate **isometrie** (in greco *isos* vuol dire "uguale" e *métron* vuol dire "misura").

Le **isometrie** oltre a conservare la distanza **conservano**:

- l'**allineamento** tra punti: tre punti che stanno sulla stessa retta se sottoposti ad una traslazione o una rotazione vengono trasformati in tre punti che stanno su una stessa retta (la parte superiore della bocca e il centro della cosa rimangono allineati);
- l'**ampiezza degli angoli**: l'angolo segnato nella figura a fianco rimane inalterato.

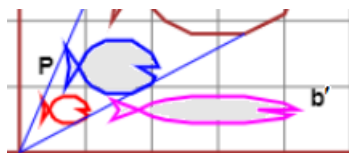


Sono casi particolari di **similitudini**, cioè di funzioni che trasformano le figure in figure ad esse **simili**.

Più in generale, si chiama **similitudine** ogni trasformazione che moltiplica la distanza tra una qualunque coppia di punti per un fissato numero **positivo** k (se $k > 1$ è un ingrandimento, se $k < 1$ è un rimpicciolimento, se $k = 1$ è una isometria).

Le similitudini del tipo $(x,y) \rightarrow k(x,y)$ **non modificano l'orientamento delle figure** (c e d sono orizzontali e puntano verso destra come P). Componendo queste similitudini con rotazioni e traslazioni si possono ottenere le altre similitudini (e è simile a P , c e d).

Le similitudini $(x,y) \rightarrow k(x,y)$ vengono chiamate anche **trasformazioni di scala monometriche** in quanto possono essere pensate come il frutto di uno **stesso** cambiamento delle due scale del sistema di riferimento: se sull'asse x e sull'asse y tracciassi le tacche più vicine tra loro, a distanza dimezzata, otterrei una rappresentazione del pesce P più piccola, uguale a quella che, col sistema attuale, si è ottenuta per il pesce c .



La trasformazione di **P** in **b** dilata orizzontalmente il pesce. Anche questa trasformazione viene chiamata *trasformazione di scala*. Più in generale sono chiamate *trasformazioni di scala* tutte le trasformazioni del tipo $(x,y) \rightarrow (hx,ky)$ con h e k numeri positivi. A lato è illustrata la trasformazione di **P** in **b'**, pesce lungo il doppio e più sottile (il moltiplicatore delle y è 0.5).

Le trasformazioni di scala con moltiplicatori delle x e delle y diversi non conservano, evidentemente, la distanza e la ampiezza angolare. Mantengono, invece, l'allineamento dei punti: segmenti vengono trasformati in segmenti. Mantengono anche il parallelismo: segmenti paralleli vengono trasformati in segmenti tra loro paralleli.

Si possono considerare molti altri tipi di trasformazioni piane, cioè di funzioni che trasformano punti del piano in altri punti del piano. A lato sono rappresentate **F** e alcune sue trasformazioni:

- **A** ottenuta mediante un movimento piano,
- **B** ottenuta con una trasformazione di scala,
- **C** ottenuta con una trasformazione di scala non monometrica,
- **D** ottenuta, invece, con una trasformazione che non conserva l'allineamento tra punti.

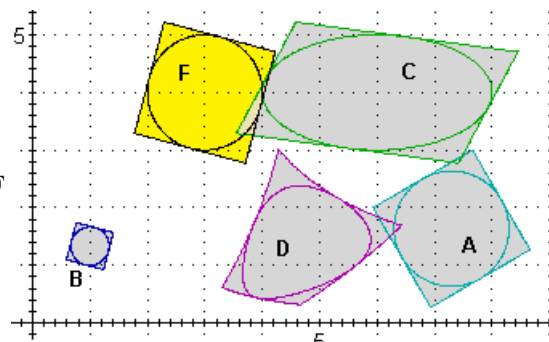
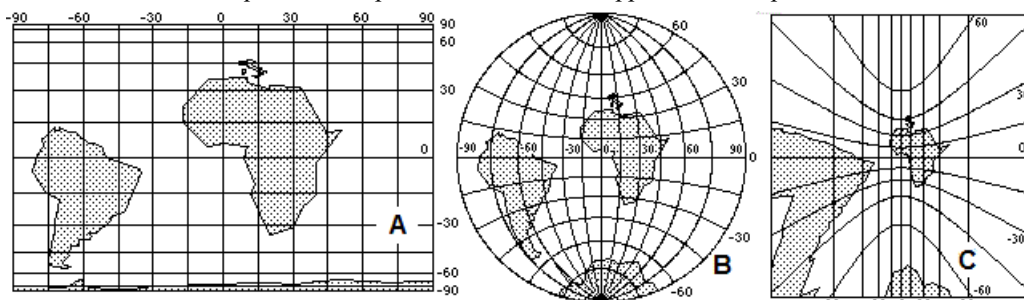


figura 4

D, infatti, trasforma i lati del quadrato non in segmenti, ma in insiemi di punti non allineati. Conserva, comunque, altri aspetti. Ad esempio il cerchio, che non ha *punti angolosi* (punti in cui la curva cambia "di scatto" direzione, come accade al contorno di un angolo non piatto nel vertice dell'angolo), viene trasformato in una figura senza punti angolosi, mentre il quadrato, che ha 4 punti angolosi, viene trasformato in una figura con 4 punti angolosi.

Di trasformazioni geometriche come questa ti occuperai negli anni prossimi, così come delle *rappresentazioni cartografiche* che trasformano i punti di porzioni della superficie terrestre in punti del piano, a cui abbiamo già accennato nella ➡ scheda 1 di *La matematica e i suoi modelli*. Ecco, sotto, qualche esempio riferito ad alcune rappresentazioni parziali del medesimo emisfero:



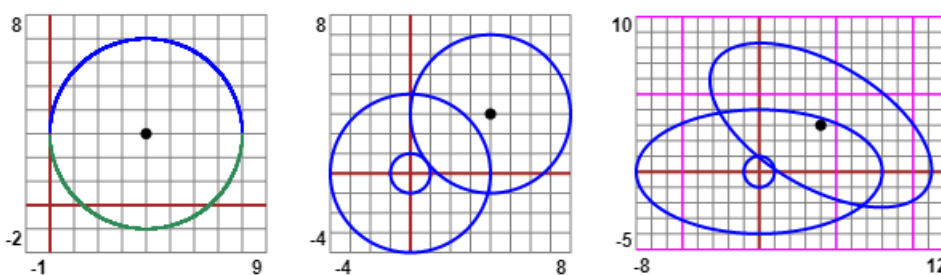
3. Altre figure

Possiamo ora definire altre figure.

Abbiamo già visto che il **cerchio** di centro C e raggio r è l'insieme dei punti che distano r da C :

$$\{P : d(P,C) = r\} = \{(x,y) : (x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = r^2\}.$$

2 Quali sono il centro e il raggio del cerchio rappresentato sotto a sinistra? Descrivi il cerchio mediante un'equazione.

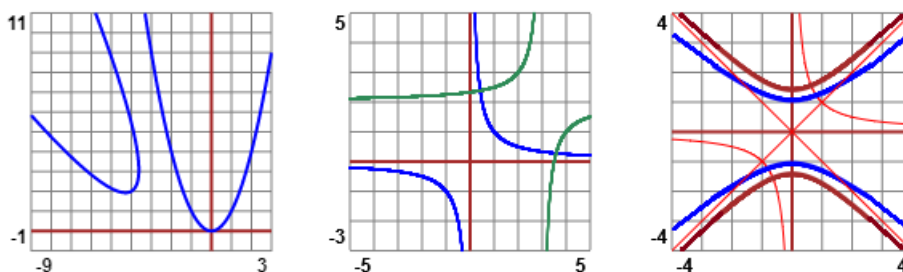


In alternativa potevamo descrivere il cerchio precedente come la figura che si ottiene trasformando il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 (α nella figura sopra al centro) mediante la similitudine ottenuta componendo la trasformazione di scala (monometrica) con moltiplicatore 4 ($\alpha \rightarrow \beta$) e la traslazione $T_{4,3}$ ($\beta \rightarrow \gamma$).

Più in generale, tutti i cerchi sono ottenibili dal cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1, cioè di equazione $x^2 + y^2 = 1$, mediante similitudini, cioè componendo trasformazioni di scala monometriche e movimenti piani.

Invece le figure ottenibili dal cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 1$ componendo trasformazioni di scala anche non monometriche e movimenti piani vengono chiamate **ellissi**. L'ellisse γ raffigurata sopra a destra è ottenibile dal cerchio α componendo la trasformazione di scala $(x,y) \rightarrow (8x,4y)$ e un movimento piano (rotazione di -30° attorno a $(0,0)$ e traslazione di passi $\Delta x=4$ e $\Delta y=3$).

Le figure di equazione $y = ax^2$ (a numero reale diverso da 0) e tutte quelle ottenibili da esse mediante movimenti piani vengono chiamate **parabole**. Sotto a sinistra è raffigurata la parabola di equazione $y = x^2$ e quella ottenuta da essa mediante la rotazione di 30° attorno a $(0,0)$ e la traslazione di passi $\Delta x=-4$ e $\Delta y=2$.



Le figure di equazione $y = a/x$ (a numero reale diverso da 0) e tutte quelle ottenibili da esse mediante movimenti piani vengono chiamate **iperboli**. Sopra al centro è raffigurata l'iperbole di equazione $y=1/x$ e quella ottenuta da essa mediante la rotazione di 90° attorno a $(0,0)$ e la traslazione di passi $\Delta x=3$ e $\Delta y=2$.

Nota. Più precisamente queste figure vengono chiamate iperboli equilateri. Infatti, più in generale, sono chiamate **iperboli** anche le figure ottenute da queste applicando delle trasformazioni di scala non monometriche. Ad esempio sopra a destra è raffigurata l'iperbole equilatera α ottenuta ruotando di 45° l'iperbole $y=1/x$ e l'iperbole (non equilatera) β ottenuta applicando anche una moltiplicazione per 75% delle y . I due "rami" delle iperboli equilateri man mano che si allontanano uno dall'altro tendono ad assumere inclinazioni perpendicolari.

3 Quanti assi di simmetria ha un'ellisse che non sia un cerchio? Quanti assi di simmetria ha una parabola? Quanti assi di simmetria ha un'iperbole (equilatera)?

4 Un rettangolo è un quadrangolo con gli angoli retti (e, quindi, con lati a 2 a 2 paralleli). Un rombo è un quadrangolo con i lati uguali. Che cos'è un rombo che è anche un rettangolo?

Trasformando un quadrato con un lato parallelo all'asse x mediante una trasformazione di scala non necessariamente monometrica che cosa ottengo?

E se ha un lato inclinato di 45° ? Quanti assi di simmetria ha la figura ottenuta?

Quale figura ottengo trasformando mediante lo stesso tipo di trasformazione un generico quadrato?

4. Alcuni teoremi

Ricorrendo alle trasformazioni geometriche e a metodi algebrici è facile dimostrare varie proprietà (**teoremi**) che con altre presentazioni della geometria piana sarebbe più complicato dimostrare. Vediamo alcuni esempi. Considerazioni più generali sulle dimostrazioni in geometria le affronterai nei prossimi anni.

• Proponiamoci, ad esempio, di affrontare il seguente problema:

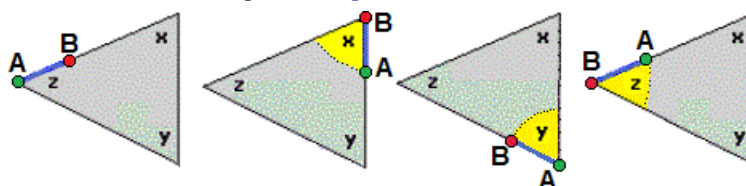
La somma delle ampiezze degli angoli di un poligono dipende solo dal numero degli angoli? In caso affermativo, quanto vale?

Proviamo a risolvere il problema operativamente. Se ritagliamo da un **triangolo** di carta le "punte" e le riuniamo senza sovrapporle in modo che i vertici si tocchino, osserviamo che esse vengono a formare un angolo di 180° . Per avere una conferma che questo è un fatto generale possiamo ripetere la prova con altri triangoli. Ci conviene farlo al computer, con un'applicazione per l'elaborazione delle immagini: comunque tracciamo un triangolo, se, come illustrato sotto, ritagliamo e spostiamo porzioni dei suoi angoli (traslandole col mouse e facendo fare una rotazione di mezzo giro ad una delle tre), riusciamo a formare un angolo di 180° .



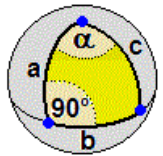
Gli altri poligoni, come visto all'inizio della scheda, possono essere ottenuti aggiungendo via via un triangolo. Quindi, come illustra la figura sopra a destra, sembra di poter concludere che la somma degli angoli di un quadrangolo vale $180^\circ+180^\circ$, di un pentagono $180^\circ+180^\circ+180^\circ$, e, in generale, di un n -agone vale $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Questi esperimenti ci consentono di **congetturare** questa proprietà, ma non ce ne danno la certezza assoluta. Vediamo un'argomentazione alternativa, più semplice e più immediatamente convincente. Dato un triangolo, sia AB un segmento su un suo lato. Lo traslo lungo il lato (nella direzione AB) fino a portare B su un vertice. Compio una rotazione (di ampiezza x) del segmento attorno a tale vertice, fino a che il segmento si dispone su un nuovo lato. Proseguo con trasformazioni analoghe: traslo e ruoto di ampiezza y , traslo e ruoto di ampiezza z , fino a ottenere un segmento sovrapposto a quello iniziale, ma con gli estremi scambiati: A è stato trasportato in quella che inizialmente era la posizione di B , e viceversa. **La direzione della semiretta AB è complessivamente variata di 180°** , ossia $x+y+z = 180^\circ$. Puoi vedere tutto ciò riassunto in questo [script](#) animato.



Naturalmente entrambe le argomentazioni valgono nel **piano euclideo** (cioè nel piano cartesiano dotato della distanza euclidea: ➡ scheda 1 di questa unità didattica), nel cui ambito abbiamo definito il nostro concetto di direzione. La proprietà vale, con buona approssimazione, per i triangoli tracciati su un foglio e gli angoli misurati con un goniometro e in tutte le situazioni modellizzabili con il piano euclideo. *Tuttavia* se tracciamo un triangolo su una grande superficie piana (cioè senza rilievi o avvallamenti, salite o discese, ...), ad es. su una grande distesa piana ghiacciata, o consideriamo il triangolo individuato dalle traiettorie rettilinee di tre navi, man mano che aumentano le dimensioni di questo triangolo la somma degli angoli si allontana sempre più da 180° .

Consideriamo ad esempio la situazione raffigurata a fianco. Noi sappiamo che si tratta di archi di cerchi con centro nel centro della terra, ossia cerchi che tagliano a metà la superficie terrestre (se non ci fossero terre emerse, mantenendo una **rotta rettilinea**, ossia non curvando mai né a destra né a sinistra, prima o poi si ritorna al punto di partenza), ma un po' di secoli fa si pensava che la superficie terrestre fosse piatta (ossia che le distese che in geografia vengono considerate "piane" avessero le stesse caratteristiche del "piano" euclideo). In questa situazione, in cui due rotte sono lungo meridiani e una è lungo l'equatore, la somma degli angoli è $180^\circ + \alpha$. Non vale evidentemente il ➡ **teorema di Pitagora** e, all'aumentare di α , si vede che **non vale neanche il fatto che ➡ un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due**; basta che α sia maggiore di 180° .

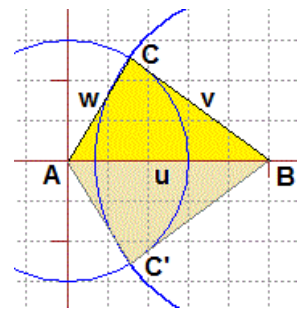


- La figura 5 richiama i cosiddetti **criteri di eguaglianza per i triangoli**. Il criterio **lato-lato-lato** (noto, specie in Italia, come "3° criterio"), che asserisce che due triangoli sono uguali se hanno uguali, ordinatamente, i tre lati, il criterio **angolo-lato-angolo** ("2° criterio"), che asserisce che due triangoli sono uguali se hanno uguali, ordinatamente, due angoli e il lato tra essi compreso), il criterio **lato-angolo-lato** ("1° criterio"), che asserisce che due triangoli sono uguali se hanno uguali, ordinatamente, due lati e l'angolo tra essi compreso), e il criterio **angolo-angolo-lato** (senza altro "nome"), che asserisce che sono uguali se hanno uguali, ordinatamente, due angoli ed un lato non compreso tra essi. Essi sono illustrati ed esemplificati anche in questi [script](#).

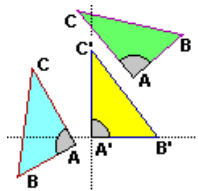


Dimostriamo, ad esempio, il criterio **lato-lato-lato**. Nel farlo sfruttiamo il fatto che i movimenti piani conservano distanze e ampiezze angolari, per cui ci conviene **collocare la figura da studiare nel modo più comodo** per lo sviluppo dei calcoli e delle manipolazioni; le relazioni tra le sue diverse componenti che vengono individuate e dimostrate valgono indipendentemente dalla collocazione scelta.

Date le lunghezze u , v e w dei lati posso tracciare un segmento AB lungo u sull'asse x , con $A=(0,0)$, e trovare il terzo vertice, C , comune ai due lati lunghi v e w , intersecando i cerchi di centro A e raggio w e di centro B e raggio v (basta intersecare i grafici di $x \rightarrow \sqrt{(w^2-x^2)}$ e di $x \rightarrow \sqrt{(v^2-(x-u)^2)}$, ovvero risolvere l'equazione $w^2-x^2 = v^2-(x-u)^2$, per trovare x_C).



Gli angoli sono poi ricavabili dalle direzioni di AC e BC . Il fatto che esista un secondo punto di intersezione, C' , indica che in realtà vi sono due triangoli, simmetrici, che hanno gli stessi lati. Per individuarne uno solo occorre precisare qual è l'ordine (in verso antiorario) con cui si succedono i lati di lunghezza u , v e w .



- Sempre usando la tecnica di collocare una figura nel modo più comodo, è facile anche dimostrare il ➡ **teorema di Pitagora**. Infatti il triangolo ABC "rettangolo in A " comunque sia disposto può essere trasformato con un movimento (ed eventualmente una simmetria) in modo che l'angolo in A venga a coincidere con l'angolo che ha per lati le parti positive degli assi x e y . Per la definizione di distanza euclidea $d(B',C')^2$ deve coincidere con $d(A',B')^2 + d(A',C')^2$.

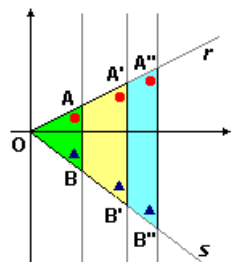
- La figura seguente illustra il **teorema delle proiezioni parallele** (che in Italia, a scuola, viene spesso chiamato anche **teorema di Talete**, anche se non è da attribuire a questo matematico e filosofo greco del VI secolo a.C.):

fissate due rette r e s e una inclinazione α diversa da quelle di r e s , la **proiezione** di r su s di inclinazione α trasforma i segmenti **proporzionalmente**.

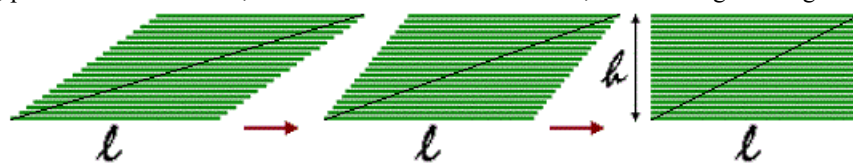
Nella figura la situazione è stata rappresentata in modo che l'inclinazione α coincida con quella dell'asse y . La proprietà può essere tradotta così:

un fascio di "raggi" paralleli proietta due qualunque segmenti di r (AA' e $A'A''$, o OA e $A'A''$, o ...) in modo che le loro immagini (BB' e $B'B''$, o OB e $B'B''$, o ...) su s hanno tra loro lo stesso rapporto che c'è tra i segmenti originali.

La dimostrazione è facile: su ogni retta non verticale le x , le y e, quindi, anche le distanze, hanno variazioni proporzionali. In particolare se su r un segmento è doppio di un altro allora gli estremi dell'uno hanno Δx doppio del Δx degli estremi dell'altro e, quindi, anche i corrispondenti segmenti su s sono l'uno il doppio dell'altro.



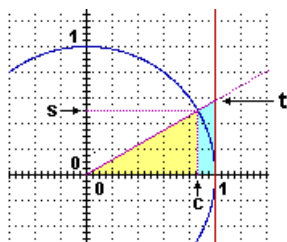
- Abbiamo visto (nella ➡ scheda 2 dell'unità didattica *I Numeri*) che l'area di un rettangolo di dimensioni l ed h è pari al prodotto $l \cdot h$. Un **parallelogramma**, come il quadrangolo C di ➡ figura 4, ha quattro lati due a due paralleli. La figura seguente spiega come l'**area di un parallelogramma** sia data dal prodotto della lunghezza l di un suo lato per la sua altezza, ossia per la distanza h del lato dal lato ad esso opposto: esso, infatti, può essere trasformato, mantenendo la stessa estensione, in un rettangolo di eguale base ed uguale altezza.



- Esamina questo [script](#) animato che illustra sia la proprietà precedente sia perché l'**area di un triangolo** può essere determinata moltiplicando la lunghezza di un suo lato per la distanza della retta su cui esso sta dal vertice ad esso opposto (distanza che viene chiamata **altezza** relativa a tale lato) e dividendo il risultato per due.

- Si usa dire che una persona, nella foga di una discussione, «parte per la tangente!» quando incomincia a divagare, a perdere il filo e il controllo delle argomentazioni, proseguendo lungo la direzione che il discorso ha preso al momento. È un modo di dire figurato che trae spunto dal seguente fenomeno:

se faccio ruotare un oggetto attaccato a un filo e ad un certo punto questo si spezza, perdo il controllo dell'oggetto ed esso prosegue (almeno nei primi momenti) con traiettoria rettilinea, lungo la direzione che aveva in quell'istante; la retta contenente tale traiettoria si dice che è **tangente** al cerchio lungo cui si muoveva l'oggetto prima del taglio; questa proprietà era usata dai frombolieri: essi lasciavano partire il proiettile dalla fionda quando questo, liberato, avrebbe proseguito lungo la direzione voluta, ossia quando la retta tangente alla traiettoria del proiettile coincideva con la direzione voluta.



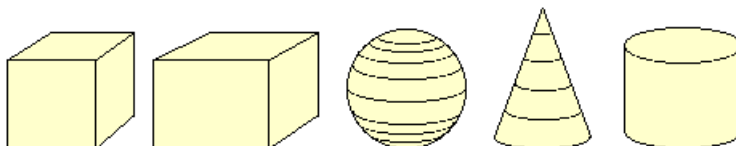
La parola "tangente" deriva dal latino, in cui significava "che tocca"; infatti tale retta "tocca" il cerchio senza attraversarlo. Si usa lo stesso termine per indicare ($\rightarrow$ §5 della scheda 2 di questa unità didattica) la "funzione tangente"; ciò perché, ad es., $\tan(30^\circ)$ può essere determinata prolungando il vettore di direzione 30° applicato in (0,0) fino a intersecare la "retta tangente" in (1,0) al cerchio di centro (0,0) e raggio 1: nella figura sotto a sinistra, in cui è rappresentata la direzione 30° , c e s sono rispettivamente il coseno e il seno di 30° ; il fatto che il valore dell'ordinata t sia effettivamente la tangente di 30° deriva dal fatto che il rapporto tra t e 1 (cioè t) è uguale al rapporto tra s e c , cioè a $\sin(30^\circ)/\cos(30^\circ) = \tan(30^\circ)$.

Si può dimostrare che ogni *retta tangente* a un qualunque cerchio è *perpendicolare al raggio* che passa per il punto di contatto.

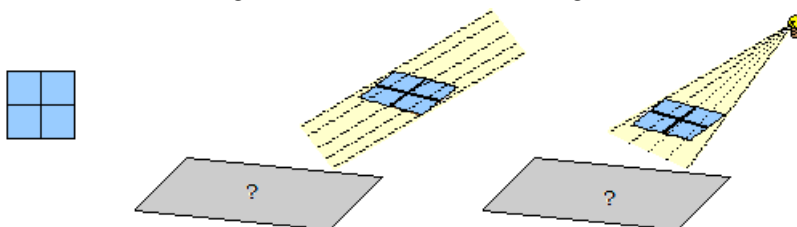
5. Esercizi

- e1** Le similitudini conservano l'area? [tutte, nessuna o solo alcune?]
Secondo te, la trasformazione di scala $(x, y) \rightarrow (2x, y/2)$ conserva l'area?
[prova a disegnare qualche poligono e la sua immagine mediante questa trasformazione]

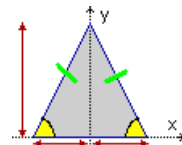
- e2** Con *piano di simmetria* di una figura si intende una superficie che divide la figura in due parti speculari (se si mettesse uno specchio al posto del piano di simmetria e si togliesse una delle due parti la visione non cambierebbe: la parte tolta ha lo stesso aspetto dell'immagine allo specchio dell'altra parte): ad esempio quando stiamo sull'attenti il nostro corpo è, grosso modo, simmetrico rispetto al piano che passa per naso, ombelico e colonna vertebrale.
Quanti piani di simmetria ha un cubo? *quanti* ne ha un parallelepipedo rettangolo?
Quanti piani di simmetria ha una sfera? *quanti* ne ha un cono retto a base circolare? *quanti* un cilindro a base ellittica non circolare?



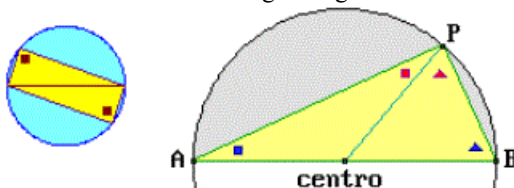
- e3** Supponiamo di disegnare su un vetro con un pennarello la figura sottostante a sinistra. *Descrivi* a parole la forma che assume l'ombra se il vetro è colpito dai raggi del sole. *Descrivi* a parole la forma che assume se il vetro è illuminato da una lampadina.
Quali proprietà conservano le due trasformazioni geometriche che associano alla figura la sua ombra nei due casi?



- e4** I *triangoli* sono detti **isosceli** ("con i gambi uguali", dalle parole greche *isos*, uguale, e *skélos*, gambo) se hanno (almeno) due lati uguali. Facendo riferimento alla figura a lato e utilizzando il criterio di eguaglianza lato-lato-lato, dimostra che un triangolo isoscele ha uguali anche i due angoli non compresi tra tali lati.



- e5** Ogni *triangolo inscritto in un semicerchio* è *rettangolo*. Per confermare con l'intuizione questa proprietà si pensi all'inserimento di una scatola con base rettangolare all'interno di una scatola con base circolare, con le scatole che si incastrino perfettamente, come nel disegno a sinistra: la diagonale del rettangolo corrisponde alla lunghezza massima occupata dal rettangolo, e quindi non è altro che un diametro del cerchio.
Si dimostri la cosa nel piano euclideo, facendo riferimento alla figura seguente e utilizzando quanto visto nell'esercizio precedente.



- 1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

triangolo, *poligono* (§1), *movimento piano* (§2), *asse di simmetria* (§2), *isometria* (§2), *similitudine* (§2), *trasformazione di scala monometrica* (§2), *tangente di una direzione* (§5), *semiretta* (§6), *trasformazione di scala* (§2), *ellisse* (§3), *parabola* (§3), *iperbole* (§3), *criterio di eguaglianza lato-lato-lato* (§4), *teorema delle proiezioni parallele* (§4), *triangolo isoscele* (§5).

- 2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: [piccola CT](#) [grande CT](#) [isto](#) [isto con %](#) [boxplot](#) [striscia](#) [100](#) [ordina](#) [Grafici](#) [divisori](#) [Indet](#) [distanza](#) [AngTriang](#)
[EguTriang](#) [AreaTriang](#)